

م. هادي

المدة : ساعة ونصف  
الدرجة : 100

امتحان الفصل الأول 2018 - 2017  
لمقرر : نظرية الأعداد

جامعة البعث  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

المسألة الأولى (35 درجة) :

ليكن  $p$  عدداً أولياً ، و  $a, b$  عددين صحيحين ، والمطلوب :

(١) أثبت أنه إذا كان  $p | ab$  فإن  $p | a$  أو  $p | b$  .

(٢) أثبت أن  $\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod{p}$  لكل  $0 < j < p$  .

(٣) إذا كان  $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$  فاثبت أن :  $a \equiv b \pmod{p}$  أو  $a \equiv -b \pmod{p}$  .

المسألة الثانية (30 درجة) :

(١) اكتب القاسم المشترك الأعظم للعددين : 20 : 44 ، كتركيب خطي لهما .

(٢) حل المعادلة :  $44x + 20y = 600$  ، وأوجد حلولها الموجبة (في حال وجودها) .

المسألة الثالثة (35 درجة) :

ليكن  $m, n$  عددين صحيحين موجبين أوليين فيما بينهما ، والمطلوب :

(١) أثبت أن :  $n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  ، حيث  $\varphi(m)$  قيمة دالة أولر من أجل العدد  $m$  .

(٢) أثبت أن :  $[m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)}] \equiv 1 \pmod{mn}$  .

(٣) أوجد مرتبة العدد 7 بالمقس 20 ، وبين إن كان جذراً أولياً (أصلياً) للعدد 20 .

د . ياسين خلوف



سنة تصحيح امتحان نظرية مقدار - الفصل الأول ٢٠١٧ - ٢٠١٨

السؤال الأول

۱- اگر  $a$  و  $b$  نسیم بطوبه باشند،  $a \times b$  و  $\gcd(a, b) = 1$  و  $\gcd(a, b) = 1$

$b(p(s)) + b(q(t)) = b$  يعني  $\omega_{\psi} \circ \psi^{-1}(ps+qt) = 1$

١-٢  $\frac{(bs)^3 \cdot p + (ab)t = b}{p|ab}$  و  $p|bs$  فرضاً و  $p|(bs.p)$  متبعاً

~~$p|b \text{ s.t. } \exists p' | [(bs)p + (ab)t] = b \sim \exists b' \sim !$~~

بذلك بالخط لزا ~  $p|ab$  فإما  $p|a$  أو  $p|b$

2- ولذا المكنى  $P$  مدقاً 'اولياً' فاعطيه كد صيغة (لخدمه) فضله  $6/12 = 3.4$  و  $6/4$  و  $6/3$

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-j+1)}{j!} = \frac{p!}{j!(p-j)!}$$

$$j! \binom{p}{j} = p(p-1) \dots (p-j+1)$$

$\frac{P}{r} = \frac{P}{r}$

۴ مرداد اولی فیجب ایسہ یقسم  
فلو کاہ

فلوكانه  $p \mid n$  أي  $3, 2, 1 \dots (n-1) \mid n$  فحيث  $n$  يقسم

~~امراضه و غيره من الامور~~

[illegible]

۱. شرط مادی ضروری مختصراً:  $4 \times \binom{4}{2} = 6$

$p \mid (a-b)(a+b) \iff p \mid (a^2 - b^2) \iff a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \iff b^2 \equiv 1 \pmod{p}$

$a \equiv -b \pmod{p}$  and  $a \equiv b \pmod{p}$  is not possible.  $p \mid (a+b)$  and  $p \mid (a-b)$

السؤال الثاني

$174 = 2 \cdot 20 + 44 \Rightarrow d(44, 20) = 4$   
 $20 = 5 \cdot 4 + 0$   
 $4 = 44 - 2(20) = 44 + (-2)(20)$

~~$$4 = 51(44) + (-2)(20)$$~~

$$600 = (150)(4) = (150)[(1)44 + (-2)(70)] = 44(150) + 20(-300)$$

از 150 = 300 و 300 = 150 امام هو

$$x = 150 + \frac{20}{4}t$$

$$x = 150 + \frac{20}{4}t \quad ; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = 150 + 5t \\ y = -300 + 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

نوعیه اول موجب عندما تكون الحسابات  
 $150 + 5t > 0$   
 $-300 + 11t > 0$   $t \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} 5t > -150 \\ 11t < -300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t > -30 \\ t < -\frac{300}{11} = -27.27 \end{array} \right\} \Rightarrow t = -29, t = -28$$

وعندئذ الحلول الموجبة هي:

$$t = -29: \quad \begin{cases} x = 150 + 5(-29) = 5 \\ y = -300 - 11(-29) = 19 \end{cases} \quad \text{أو} \quad t = -28: \quad \begin{cases} x = 150 + 5(-28) = 10 \\ y = -300 - 11(-28) = 8 \end{cases}$$

السؤال 35

اذا  $\psi$  هي  $\psi(Z_m)$  عند  $\psi$  اشارة  $\psi(m)$  اي  $\psi(m) = |\psi(Z_m)|$   
 فيه  $\psi(m)$  دالة اويلر (قيمة  $\psi$  عند  $m$ )  $\psi(m)$  عدد طبيعي  $\psi(m) \in \mathbb{N}$   $\psi(m) \sim m$

دعونا نثبت ان  $\psi$  هي دالة اويلر

$$\bar{n} \in \psi(Z_m) \Rightarrow (\bar{n})^{\psi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow \bar{n}^{\psi(m)} = 1 \pmod{m}$$

$$\bar{n}^{\psi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (\bar{n}^{\psi(m)} - 1)$$

$$\bar{n}^{\psi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (\bar{n}^{\psi(n)} - 1)$$

$$d(m, n) = 1 \text{ نكوه}$$

$$m, n \mid (\bar{n}^{\psi(m)} - 1) \mid (\bar{n}^{\psi(n)} - 1)$$

$$m, n \mid \left[ \bar{n}^{\psi(m)} \cdot \bar{n}^{\psi(n)} - (\bar{n}^{\psi(m)} + \bar{n}^{\psi(n)} + 1) \right]$$

$$m \mid \bar{n}^{\psi(m)} \text{ و } n \mid \bar{n}^{\psi(n)} \Rightarrow m, n \mid \bar{n}^{\psi(m)} \cdot \bar{n}^{\psi(n)}$$

$$m, n \mid \left[ 1 - (\bar{n}^{\psi(m)} + \bar{n}^{\psi(n)} + 1) \right] \Rightarrow m, n \mid 1 - (\bar{n}^{\psi(m)} + \bar{n}^{\psi(n)} + 1)$$

السؤال 36  
 اشارة  $\psi$  العدد 7 بالاعلى 20 في شكل  $\psi(20)$  اي في شكل 8:  $\psi(20) = 8$

$$\psi(20) = 8$$

$$(7)^2 = 49 \equiv 9 \pmod{20} \text{ و } (7)^4 \equiv 81 \pmod{20} \equiv 1 \pmod{20}$$

$$d(7, 20) = 4 \text{ و } \psi(7) = 6 \text{ و } \psi(20) = 8$$